المحاضرة الثامنة 2020/11/12

37

تكملة البرهان في المحاضرة السابقة :

التمرين 4 :

$(x_1, x_2) \in A$ نوجد نظيره بالنسبة لـ $(*)$

نفرض (y_1, y_2) عنصر كيفي يحقق

$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (0,0)$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -x \in \mathbb{R} \\ x_1 + y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = -x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذاً نظير (x_1, x_1) هو $(-x_1, -x_1) \in \mathbb{R}^2$

كل عنصر من A يقبل نظير بالنسبة لـ $(*)$

التمرين 5 :

لدينا $(x_1, y_1) \in A$ عنصر كيفي ونبحث عن العنصر (x_2, y_2) يحقق

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (1,0)$

عكس الطرف

$(x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + x_2 y_1) = (1,0)$

بالمطابقة x_1, y_1 مجهولين

$$\begin{cases} x_1 x_2 - y_1 y_2 = 1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times y_1 \\ \times x_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y_1 x_1 x_2 - y_1^2 y_2 = y_1 \\ x_1^2 y_2 + x_2 x_1 y_1 = 0 \end{matrix}$$

38

بجمع المعادلتين الأخيرتين نحصل على :

$$-y_1^2 y_2 - x_1^2 y_2 = y_1$$

ومنه

$$y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \in \mathbb{R}$$

نعوض في (1)

$$y_1 x_2 = -x_1 y_2$$

$$x_2 y_1 = +x_1 \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \in \mathbb{R}$$

إذاً لأجل $(x_1, y_1) \in A^*$ لدينا

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} , \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) \in A$$

نظير (x_1, y_1) بالنسبة لـ $(*)$

* حالة $(x_1, y_1) = (0,0)$

البحث عن وجود نظير له : أي هل يوجد

$(x', y') \in A$ بحيث يحقق

$(0,0) \cdot (x', y') = (1,0)$

39

$(0,0) \cdot (0,0) = (1,0)$

وعليه فيوجد $(0,0)$ لا يقبل نظير بالنسبة لـ $(\cdot)$

$A = \mathbb{R}$

$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$

تجميعي ؟ تبديلي ؟

$(x, y) \cdot (e, e') = (x, y)$

$$\begin{cases} xe = x \\ ye' = y \end{cases}$$

لعنصر $(x, y) \in A$

$(x, y) \cdot (x', y') = (1,1)$

$$\begin{cases} x \cdot x' = 1 \longrightarrow x' = \frac{1}{x} \\ y \cdot y' = 1 \longrightarrow y' = \frac{1}{y} \end{cases}$$

$(x, y) \in A^* \longrightarrow$ نظيره $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right)$

40

عل $(\cdot)$ توزع على $(+)$

$(x, y) \cdot [(x', y) + (x'', y'')]$

$\stackrel{?}{=} (x, y)(x', y') + (x, y)(x'', y'')$

تكملة الحل في دفترك.

$\mathbb{R}^2$ -

$(x, y) *_1 (x', y') = (xx', 0)$

$(x, y) *_2 (x', y') = (x - y + x' + y', y - y + y' + x')$

$*_2$ تبديلي ؟ تجميعي ؟

حل $*_1$:

$(x, y) *_1 (e_1, e_1) = (x, y)$

$(xe_1, 0) = (x, y) \rightarrow \begin{cases} xe_1 = x \rightarrow e_1 = 1 \\ 0 = y \neq 0 \end{cases}$

لا يوجد عنصر حيادي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هل $*_1$ يتوزع على $*_2$

$$(x,y) *_1 [(x',y') *_2 (x'',y'')]$$

$$(x,y) *_1 [x'+y''+y'+x'', y'+y']$$

$$= (xx'+y''x+y'x+x''x, 0)$$

$$((x,y) *_1 (x',y')) *_2 [(x,y) *_1 (x'',y'')]$$

$$(xx',0) *_2 (xx'',0)$$

$$= (xx'+xx'', 0)$$

$*_1$ يتوزع على $*_2$

النتيجة المطلوبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner